Sur la dualité révision contraction en dynamique de croyances

Ramón Pino Pérez

CRIL, Université d'Artois, France

Journée internationale de la logique

Paris, le 16 janvier 2023

Le problème

Comment changer un état épistemique à la lumière d'une nouvelle information ?

- Ajout (Expansion) $K + \alpha$
- Ajout prudent (Révision) $K * \alpha$
- Retrait (Contraction) $K \dot{-} \alpha$

Principes:

- Minimalité
- Succès
- Cohérence

Levi et Harper

- $K *_{\dot{-}} \alpha = (K \dot{-} \neg\alpha) + \alpha$ (Identité de Levi)
- $K \dot{-}_{*} \alpha = K \cap (K * \neg\alpha)$ (Identité de Harper)

[Levi, I.: Subjunctives, dispositions and chances. Synthese 34, 423-455 (1977)]

[Harper, W.L.: Rational conceptual change. In: 1976 Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, PSA, vol. 2, pp. 462-494. Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich (1977)]

Postulats pour la révision:

(K$*$1) $K * \alpha$ est clos par déduction
(K$*$2) $\alpha \in K * \alpha$
(K$*$3) $K * \alpha \subseteq K + \alpha$
(K$*$4) $\neg\alpha \notin K \quad \Rightarrow \quad K + \alpha \subseteq K * \alpha$
(K$*$5) $\alpha \nvdash \bot \Rightarrow K * \alpha \nvdash \bot$
(K$*$6) $\alpha \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad K * \alpha = K * \beta$
(K$*$7) $K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$
(K$*$8) $\neg\beta \notin K * \alpha \Rightarrow (K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$

Postulats pour la contraction:

(K$\dot{-}$1) $K \dot{-} \alpha$ est clos par déduction
(K$\dot{-}$2) $K \dot{-} \alpha \subseteq K$
(K$\dot{-}$3) $\alpha \notin K \quad \Rightarrow \quad K \dot{-} \alpha = K$
(K$\dot{-}$4) $\nvdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \notin K \dot{-} \alpha$
(K$\dot{-}$5) $K \subseteq (K \dot{-} \alpha) + \alpha$
(K$\dot{-}$6) $\alpha \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad K \dot{-} \alpha = K \dot{-} \beta$
(K$\dot{-}$7) $(K \dot{-} \alpha) \cap (K \dot{-} \beta) \subseteq K \dot{-} (\alpha \wedge \beta)$
(K$\dot{-}$8) $\alpha \notin K \dot{-} (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow K \dot{-} (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \dot{-} \alpha$

Théorème

Si $\dot{-}$ est un opérateur de contraction, alors $*_{\dot{-}}$, défini par l'identité de Levi, est un opérateur de revisión.
Si $*$ est un opérateur de révision, alors $\dot{-}_*$, défini par l'identité de Harper, est un opérateur de contraction.
Soient $*$ un opérateur de revisión et $\dot{-}$ un opérateur de contraction. Alors:

1. $* = *_{\dot{-}_*}$
2. $\dot{-} = \dot{-}_{*_{\dot{-}}}$

[Alchourrón, C.E., G¨ardenfors, P., Makinson, D.: On the logic of theory change:partial meet contraction and revision functions. J. Symbolic Logic 50, 510-530 (1985)]

KM = Katsuno-Mendelzon
On travaille en logique propositionnelle finie.
Ici les opérateurs sont du type $\circ : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Les postulats d'un bon opérateur de révision sont les suivants:

(R○1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$
(R○2) $\varphi \wedge \alpha \nvdash \bot \Rightarrow \varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$
(R○3) $\alpha \nvdash \bot \Rightarrow \varphi \circ \alpha \nvdash \bot$
(R○4) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Rightarrow \varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$
(R○5) $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$
(R○6) $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot \Rightarrow \varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$

Notez que à chaque théorie K on peut associer une formule φ_K telle que $Cn(\varphi_K) = K$.

Théorème

Si $\circ$ est un opérateur de révision KM alors l'opérateur $*$ défini par $K * \alpha = Cn(\varphi_K \circ \alpha)$ est un opérateur de révision AGM.
Si $*$ est un opérateur de révision AGM alors l'opérateur $\circ$ défini par $\varphi \circ \alpha = \varphi_{Cn(\varphi) * \alpha}$ est un opérateur de révision KM.

[Katsuno, H., Mendelzon, A.O.: Propositional knowledge base revision and minimal change. Artif. Intell. 52, 263-294 (1991)]

Représentation

Définition

Un assignement fidèle ($\varphi \mapsto \preccurlyeq_\varphi$) est une fonction qui associe a chaque formule φ un préordre total sur les valuations tel que $[\![\varphi]\!] = min(\preccurlyeq_\varphi)$

Théorème (KM)

$\circ$ est un opérateur KM (i.e., il satisfait le postulats R$\circ$1)-(R$\circ$6) ssi il existe un assignement fidèle ($\varphi \mapsto \preccurlyeq_\varphi$) tel que

$$[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$$

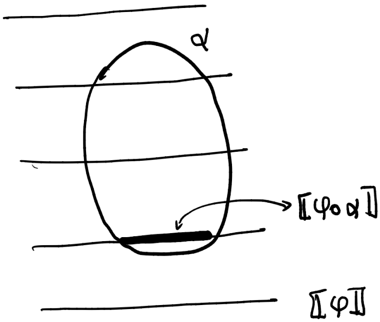


Figure: Interprétation de la représentation pour la révision

CKM = Caridroit-Konieczny-Marquis
On travaille en logique propositionnelle finie. Ici les opérateurs sont du type $- : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Les postulats d'un bon opérateur de contraction sont les suivants:

(C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$

(C2) Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$

(C3) Si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$

(C4) $\varphi - \alpha \wedge \alpha \vdash \varphi$

(C5) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ alors $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$

(C6) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi - \alpha \vee \varphi - \beta$

(C7) Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

À chaque théorie K on peut associer une formule φ_K telle que $Cn(\varphi_K) = K$.

Théorème

Si $-$ est un opérateur de contraction CKM alors l'opérateur $\dot{-}$ défini par $K \dot{-} \alpha = Cn(\varphi_K - \alpha)$ est un opérateur de contraction AGM.
Si $\dot{-}$ est un opérateur de contraction AGM alors l'opérateur $-$ défini par $\varphi - \alpha = \varphi_{Cn(\varphi) \dot{-} \alpha}$ est un opérateur de contraction CKM.

[Caridroit, T., Konieczny, S., Marquis, P.: Contraction in propositional logic. International Journal of Approximate Reasoning 80, 428-442 (2017)]

Représentation de la contraction finie

Théorème (CKM)

– est un opérateur CKM (i.e., *il satisfait le postulats C1)-(C7) ssi il existe un assignement fidèle ($\varphi \mapsto \leqslant_\varphi$) tel que*

$$[\![\varphi - \alpha]\!] = [\![\varphi]\!] \cup min([\![\neg\alpha]\!], \leqslant_\varphi)$$

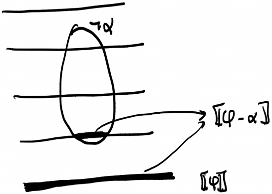


Figure: Interprétation de la représentation pour la contraction

Identités de Levi et Harper dans le cadre fini

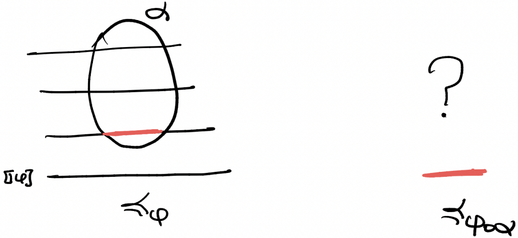
- $\varphi \circ_{-} \alpha = (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$ (Identité de Levi)
- $\varphi -_{\circ} \alpha = \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$ (Identité de Harper)

Théorème

Si $-$ est un opérateur de contraction CKM, alors $\circ_{-}$, défini par l'identité de Levi, est un opérateur de revisión KM.
Si $\circ$ est un opérateur de révision KM, alors $-_{\circ}$, défini par l'identité de Harper, est un opérateur de contraction CKM.
Soient $\circ$ un opérateur de revisión KM et $-$ un opérateur de contraction CKM. Alors:

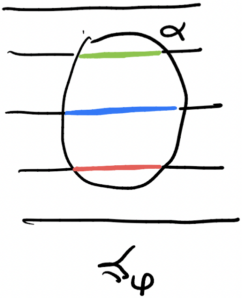
1. $\circ = \circ_{-_{\circ}}$
2. $- = -_{\circ_{-}}$

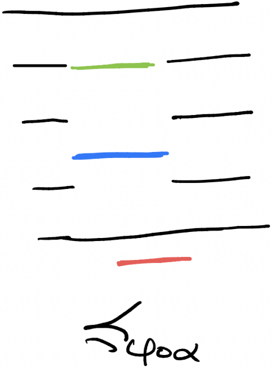
DP = Darwiche-Pearl
Le problème du cadre KP c'est qu'il y a très peu de liens entre $\preccurlyeq_\varphi$ et $\preccurlyeq_{\varphi\circ\alpha}$.



Leur idée

Après révison par α les modèles de α conservent leur ordre relative ; les contremodèles aussi ; et le modèles de α n'empirent pas en relation aux contremodèles.





Espace épistémique $\mathcal{E}$ c'est un paire $\langle E, B\rangle$, où E est un ensemble et B est une fonction $B : E \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}}{}^{*}$.
$\circ : E \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow E$ est un *opérateur DP* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- **(R*1)** $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$;
- **(R*2)** Si $B(\Psi) \wedge \mu \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi) \wedge \mu$;
- **(R*3)** Si $\mu \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \circ \mu) \nvdash \bot$;
- **(R*4)** Si $\mu \equiv \mu'$, alors $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi \circ \mu')$;
- **(R*5)** $B(\Psi \circ \mu) \wedge \mu' \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \mu'))$;
- **(R*6)** Si $B(\Psi \circ \mu) \wedge \mu' \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \circ (\mu \wedge \mu')) \vdash B(\Psi \circ \mu) \wedge \mu'$.
- **(C1)** Si $\alpha \vdash \mu$, alors $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$
- **(C2)** Si $\alpha \vdash \neg\mu$, alors $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$
- **(C3)** Si $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$, alors $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$
- **(C4)** Si $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\mu$, alors $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \nvdash \neg\mu$

Représentation DP

Une fonction $\Psi \mapsto \preccurlyeq_\Psi$ qui envoie un état épistémique $\Psi \in E$ à un préordre total sur les interprétations $\preccurlyeq_\Psi$ est un *assignement fidèle* si $[\![B(\Psi)]\!] = min(\preccurlyeq_\Psi)$

Théorème (DP)

$\circ$ est un opérateur DP ssi il y a un assignement fidèle $\Psi \mapsto \preceq_\Psi$ tel que :

CR1. *If* $\omega \models \mu$ *and* $\omega' \models \mu$, *then* $\omega \preceq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \preceq_{\Psi\circ\mu} \omega'$

CR2. *If* $\omega \not\models \mu$ *and* $\omega' \not\models \mu$, *then* $\omega \preceq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \preceq_{\Psi\circ\mu} \omega'$

CR3. *If* $\omega \models \mu$ *and* $\omega' \not\models \mu$, *then* $\omega \prec_\Psi \omega' \Rightarrow \omega \prec_{\Psi\circ\mu} \omega'$

CR4. *If* $\omega \models \mu$ *and* $\omega' \not\models \mu$, *then* $\omega \preceq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega \preceq_{\Psi\circ\mu} \omega'$,

et

$$[\![B(\Psi \circ \mu)]\!] = \min([\![\mu]\!], \preccurlyeq_\Psi)$$

[Darwiche, A., Pearl, J.: On the logic of iterated belief revision. Artif. Intell. 89, 1-29 (1997)]

En collaboration avec Sébastien Konieczny.

Postulats basiques :

(C1) $B(\Psi) \vdash B(\Psi - \alpha)$

(C2) Si $B(\Psi) \nvdash \alpha$, alors $B(\Psi - \alpha) \vdash B(\Psi)$

(C3) Si $B(\Psi - \alpha) \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$

(C4) $B(\Psi - \alpha) \wedge \alpha \vdash B(\Psi)$

(C5) Si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ alors $B(\Psi - \alpha_1) \equiv B(\Psi - \alpha_2)$

(C6) $B(\Psi - (\alpha \wedge \beta)) \vdash B(\Psi - \alpha) \vee B(\Psi - \beta)$

(C7) Si $B(\Psi - (\alpha \wedge \beta)) \nvdash \alpha$, alors $B(\Psi - \alpha) \vdash B(\Psi - (\alpha \wedge \beta))$

Postulats pour l'itération

(C8) Si $\neg\alpha \vdash \gamma$ alors $B(\Psi - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \alpha) \Leftrightarrow B(\Psi - \gamma - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \gamma - \alpha)$

(C9) Si $\gamma \vdash \alpha$ alors $B(\Psi - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \alpha) \Leftrightarrow B(\Psi - \gamma - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \gamma - \alpha)$

(C10) Si $\neg\beta \vdash \gamma$ alors $B(\Psi - \gamma - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \gamma - \alpha) \Rightarrow B(\Psi - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \alpha)$

(C11) Si $\gamma \vdash \beta$ alors $B(\Psi - \gamma - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \gamma - \alpha) \Rightarrow B(\Psi - (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi - \alpha)$

Représentation de la contraction itérée

Théorème

*Un opérateur $-$ satisfait **(C1) - (C7)** ssi il y a un assignement fidèle $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tel que :*

$$[\![\Psi - \alpha]\!] = [\![\Psi]\!] \cup \min([\![\neg\alpha]\!], \leq_\Psi)$$

Théorème

*Soit $-$ un opérateur qui satisfait **(C1) - (C7)**. Cet opérateur satisfait **(C8) - (C11)** si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Si* $\omega, \omega' \in [\![\gamma]\!]$ *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi - \gamma} \omega'$
2. *Si* $\omega, \omega' \in [\![\neg\gamma]\!]$ *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi - \gamma} \omega'$
3. *Si* $\omega \in [\![\neg\gamma]\!]$ *and* $\omega' \in [\![\gamma]\!]$ *alors* $\omega <_\Psi \omega' \Rightarrow \omega <_{\Psi - \gamma} \omega'$
4. *Si* $\omega \in [\![\neg\gamma]\!]$ *and* $\omega' \in [\![\gamma]\!]$ *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega \leq_{\Psi - \gamma} \omega'$

Identité de Levi $\Psi \star \alpha = (\Psi - \neg\alpha) \oplus \alpha$

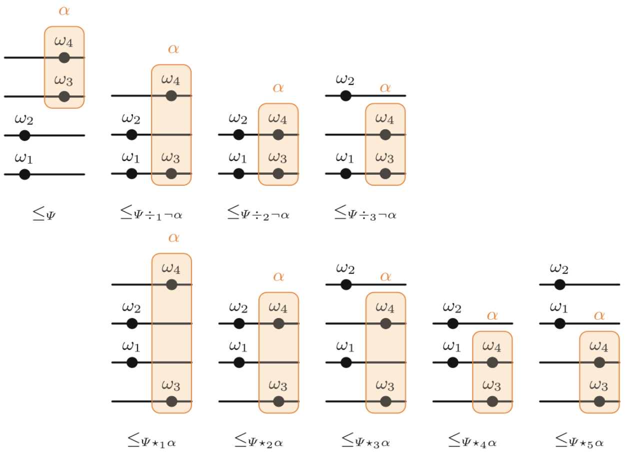
Identité de Harper $\Psi - \alpha = \Psi \sqcap (\Psi \star \neg\alpha)$

Les choix des $\oplus$ et de $\sqcap$ sont divers et dépendants de l'espace épistémique.

Dans le cas des préordres totaux on peut prendre comme $\oplus$ un opérateur de révision DP comme celui de Boutilier, par exemple. Dans ce cas l'identité de Levi donne un opérateur de revision DP.

L'autre identité a été étudiée par Booth et Chandler dans le cadre de préordres totaux.

Impossibilité de la dualité dans le cadre iterée



Corollaire

Dans l'espace epistémique des preordres totaux, il y plus d'opérateurs de révision DP que des opérateurs de contraction.

Ainsi, la dualité contraction revision est impossible.

[Konieczny, S., Pino Pérez, R.: On Iterated Contraction: Syntactic Characterization, Representation Theorem and Limitations of the Levi Identity. S. Moral et al. (Eds.): SUM 2017, LNAI 10564, pp. 348-362, 2017.]